Lathund, mer om tal, åk 9

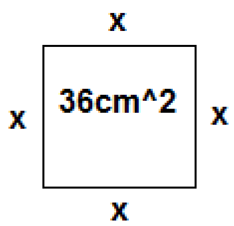
Följande saker måste ni kunna:

Tal i kvadrat:
Ni ska veta att $\mathbf{5^2}$ är samma sak som **”fem upphöjt till två”**, **”fem i kvadrat”** och **”kvadraten på 5”**.

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Kvadratrot:

Tänk er en kvadrat (dvs. alla sidor är lika långa). I den här kvadraten vet vi att ytan (arean) är 36 cm^2 men vi vet inte hur långa sidorna är.
För att räkna ut ytan (arean) av en kvadrat multiplicerar vi ju en sida med en annan sida, eftersom alla sidor i en kvadrat är lika långa betyder det ju att vi multipliceras ett tal med sig självt och får ytan 36 cm^2.



Det ger oss följande ekvation om vi kallar sidorna i kvadraten för x.

$x \cdot x = 36$, som i sin tur kan skrivas som $x^2 = 36$

För att ta reda på vilket tal som multiplicerat med sig självt blir 36, säger man att man tar **”kvadratroten ur 36”** eller **”roten ur 36”**. Det skrivs **√36**.

Svaret på uppgiften är 6 cm eftersom **√36 = 6**

OBS!
Om vi skulle lösa en liknande uppgift där ytan på kvadraten istället var $\mathbf{5\ cm^2}$ måste vi tänka på hur vi svarar. För att ta reda på sidorna räknar vi **√5** (roten ur fem). Men det finns ingen jämn rot till talet 5, dvs. svaret blir ett decimaltal (≈ 2,24 cm).

Det exakta svaret på sidornas längd är **√5 cm** och **2,24 cm** är ett ungefärligt svar (eftersom det är avrundat)

Regler för negativa tal

+ - = -	- + = -	+ + = +	- - = +

Exempel addition:
12 + (-3) = 12 – 3 = 9 (-12) + (-3) = (-12) – 3 = -15
Exempel Subtraktion:
12 - (-3) = 12 + 3 = 15 (-12) - (-3) = (-12) + 3 = -9
Exempel multiplikation:
12 · (-3) = -36 (-12) · 3 = -36 (-12) · (-3) = 36
Exempel division:
$\frac{12}{(-3)}$ = -4 $\frac{(-12)}{3}$ = -4 $\frac{(-12)}{(-3)}$ = 4

Potenser

10^3 (Potensens delar: **basen** i det här fallet är 10 och **exponenten** är 3)

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

Förståelse för tiopotenser är viktigt för att förstå att dessa kan användas när man vill skriva mycket stora eller små tal. T.ex om man ska räkna ut omkretsen på en väteatom eller liknande.

Har vi istället en **negativ exponent** ser de ut på följande sätt:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Men hur hjälper detta oss beskriva små och stora tal? Jo, för är man lite lat, precis som ni är. Kan man skippa att skriva ut alla siffror och istället skriva talen med hjälp av tiopotenser. Detta brukar kallas för grundpotensform.

Grundpotensform

Nu leker vi med talet 2500 (vi faktoriserar talet).

Är alla med på följande?
$2500 = 2{,}5 \cdot 1000 = 2{,}5 \cdot 10^3$ (i det sista ledet har vi skrivit talet 2500 i grundpotensform)

När vi ska skriva ett tal i grundpotensform ska vi skriva talet som en produkt av en tiopotens samt ett tal som ska vara större än 1 men mindre än 10 (precis som vi gjorde med talet 2500 ovan).

Några exempel:
$6000 = 6 \cdot 10^3$ $\quad$ $0{,}035 = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ $\quad$ $82\,500\,000 = 8{,}25 \cdot 10^7$

Räkneregler för potenser

OBS! För att dessa räkneregler ska gälla måste potenserna ha samma bas. Om vi multipliceras två potenser som har samma bas med varandra kan vi bara addera deras exponenter. På liknande sätt kan vi när vi dividerar två potenser med samma bas med varandra bara subtrahera nämnarens exponent från täljarens exponent.

Exempel multiplikation (addera exponenterna):
$10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$ Var noga med att reglerna för negativa tal gäller om någon eller båda exponenterna skulle råka vara negativa. Se nedan.

$10^{-3} \cdot 10^{-1} = 10^{(-3)+(-1)} = 10^{-3-1} = 10^{-4}$ (det gäller att inte tappa bort sig vid alla teckenbyten)

Exempel division (subtrahera exponenterna):
$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$ Nu visar jag ett exempel till där vi återigen måste tänka till…

$$\frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^{(-2)-(-4)} = 10^{-2+4} = 10^2$$

Räkna med tal i grundpotensform

Det är egentligen inte mycket svårare, det är bara att räkna tiopotenserna för sig och talen för sig.

Se några exempel:

$8 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^3 = 8 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 48 \cdot 10^{6+3} = 48 \cdot 10^9 = 4{,}8 \cdot 10 \cdot 10^9 = 4{,}8 \cdot 10^{1+9} = 4{,}8 \cdot 10^{10}$

$\frac{9 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-9}} = \frac{9}{3} \cdot 10^{(-6)-(-9)} = 3 \cdot 10^{-6+9} = 3 \cdot 10^3$

Prefix

Prefix	Symbol	Multiplier	
exa	E	10^{18}	1,000,000,000,000,000,000
peta	P	10^{15}	1,000,000,000,000,000
tera	T	10^{12}	1,000,000,000,000
giga	G	10^{9}	1,000,000,000
mega	M	10^{6}	1,000,000
kilo	k	10^{3}	1,000
hecto	h	10^{2}	100
deka	da	10^{1}	10
deci	d	10^{-1}	0.1
centi	c	10^{-2}	0.01
milli	m	10^{-3}	0.001
micro	μ	10^{-6}	0.000,001
nano	n	10^{-9}	0.000,000,001
pico micro micro	p $\mu\mu$	10^{-12}	0.000,000,000,001
femto	f	10^{-15}	0.000,000,000,000,001
atto	a	10^{-18}	0.000,000,000,000,000,001

Regler vid räkning med kvadratrötter

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{9 \cdot 9} = \sqrt{81} = 9$

(Det betyder att om vi multiplicerar två kvadratrötter med varandra kan vi skriva talen under samma rottecken och först räkna ut produkten och sedan ”dra roten ur”.

På samma sätt gäller vid division:

$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$

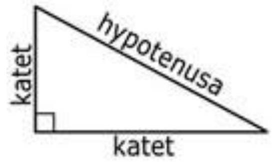
Det går bra att faktorisera talen för att underlätta räkningen, här kommer ett svårt exempel:

$\sqrt{\frac{4a^2}{25b^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot a \cdot a}{5 \cdot 5 \cdot b \cdot b}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} \cdot \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a}{5b}$

Pythagoras sats

I flera tusen år har människan känt till ett speciellt samband som idag kallas Pythagoras sats. Trots att satsen fått sitt namn efter den grekiska matematikern Pythagoras (verksam för ca. 2500 år sedan) så var det inte han som upptäckte sambandet, utan det var känt långt tidigare. Pythagoras anses dock ha varit den första som bevisade satsen.

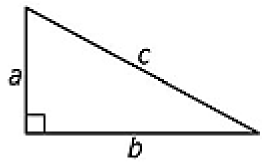
Pythagoras sats handlar om rätvinkliga trianglar, dvs. trianglar med en rät vinkel (90°). I en sådan triangel kallas de sidor som möts i den räta vinkeln för kateter och den tredje sidan för hypotenusa.



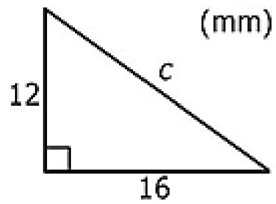
Pythagoras sats kan med ord formuleras:
Summan av kvadraterna på katetrarna är lika med kvadraten av hypotenusan.

Med matematiska symboler skrivs Pythagoras sats:

$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$



Pythagoras sats kan användas för att ta reda på en okänd sida i en triangel.
Exempel:
Antag exempelvis att en rätvinklig triangel har kateter vars längder är 12 mm respektive 16 mm och att du vill ta reda på hur lång hypotenusan är.



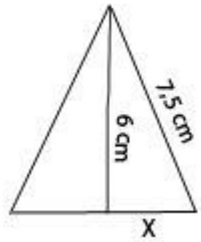
Antag att hypotenusans längd är c mm lång.

Enligt Pythagoras sats gäller:	$12^2 + 16^2 = c^2$
Termerna räknas ut:	$144 + 256 = c^2$
Summan beräknas:	$400 = c^2$

$c^2 = 400$ Alltså måste $c = \sqrt{400} = 20$

Lösa andra typer av problem med hjälp av Pythagoras sats

Här går uppgiften ut på att räkna ut sidan x. På bilden kan vi se att vi har en rätvinklig triangel med en hypotenusa = 7,5 cm och en katet = 6 cm och den sista kateten döper vi till x.



Enligt Pythagoras sats gäller:	$x^2 + 6^2 = 7{,}5^2$
Nu använder vi balansmetoden:	$x^2 = 7{,}5^2 - 6^2$
Summan beräknas:	$x^2 = 56{,}25 – 36$
Då får vi:	$x^2 = 20{,}25$
Sidan x är:	$x = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$

Inte så svårt va? Det gäller bara att man kommer ihåg hur man arbetar med balansmetoden för att ta reda på en obekant, i det här fallet sidan x.

Lycka till! /Anders